第 60 卷　第 5 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 60　No. 5
2021 年　9 月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　Sept.　2021

DOI：10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2020. 06. 18. 2020A027

偶极Loewner微分方程的一些估计*

杜振叶，蓝师义

广西民族大学数学与物理学院，广西 南宁 530006

摘　要： Loewner微分方程是一种产生Loewner链的偏微分方程。首先，应用Bieberbach定理给出了偶极Loewner微分方程的解关于时间方向变化的一个估计；其次，基于逆时间的Loewner微分方程导出了对应于两个不同驱动函数的偶极Loewner微分方程的解的差值可以通过这两个驱动函数差的上确界范数来估计。这将通弦与径向Loewner微分方程的一些相应结果推广到偶极Loewner微分方程。

关键词： Loewner微分方程；驱动函数；随机Loewner演变（SLE）

中图分类号： O175　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 0529 -6579（2021）05 -0175 -10

Some estimates for the dipolar Loewner differential equation

DU Zhenye, LAN Shiyi

School of Mathematics and Physics, Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006, China

Abstract: The Loewner differential equation is a partial differential equation that generates a Loewner chain. An estimation of the solution of the dipolar Loewner differential equation for time-direction is first derived by using Bieberbach theorem. Based on the reverse-time Loewner equation the difference of two solutions to the dipolar Loewner equation with two different deriving functions is estimated in terms of the supremum norm of the difference of the two driving functions. This generalizes some related results for the chordal and radial Loewner equations to the dipolar setting.

Key words: Loewner differential equation; driving function; stochastic Loewner evolution (SLE)

随机Loewner演变（简称SLE）是Schramm [1] 研究回路删除随机游走与一致生成树的尺度极限时引入的一类含有一个参数的随机曲线族。这类随机曲线可以通过求解一个驱动函数为时间改变的Brownian运动的Loewner微分方程来描述。已经证明，SLE可以用来描述若干来自统计力学的二维离散模型，包括Ising模型 [2-3]、临界渗流 [4]、回路删除游走 [5]、一致生成树 [5]、调和探索过程 [6]、离散Gassian自由场 [7] 与 $q=2$ 的随机簇模型 [8] 等。这为人们严格数学理解这些模型开辟了一条的新途径。同时，SLE也使关于平面Brownian运动的若干长时间公开问题得到了解决，尤其是Mandelbrot关于Brownian运动边界的Hausdorff维数的猜测 [9] 与Brownian运动相交指数值的决定 [10-12]。近年来，随着对SLE研究的不断深入，导致了人们对Loewner微分方程的进一步研究 [13-16]。最常见的Loewner微分方程有下面3种类型：一是上半平面内的通弦Loewner方程，它导致的Loewner链是一类从上半平面到上半平面子集的共形映射；二是单位圆盘内的径向Loewner方程，其产生的Loewner链是一族从单位圆盘到单位圆盘子集的共形映射；三是带形区域内的偶极Loewner方程，它产生的Loewner链是一类从带形区域到带形区域子集的共形映射。当然

* **收稿日期：** 2020 - 06 - 18　　**录用日期：** 2020 - 11 - 11　　**网络首发日期：** 2021 - 03 - 19
基金项目： 国家自然科学基金（11661011）；广西自然科学基金（2016GXNSFAA380099）；广西民族大学研究生创新项目（gxun-chxzs2019027）；广西混杂计算与集成电路设计分析重点实验室项目
作者简介： 杜振叶（1996年生），男；**研究方向：** 随机Loewner演变（SLE）；E-mail：duzhenyemath@163. com
通信作者： 蓝师义（1966年生），男；**研究方向：** 随机Loewner演变（SLE）；E-mail：lanshiyi@gxun. edu. cn

还有其他变式，有关Loewner微分方程的理论及其相关背景知识可参见文[15-16]等。

对于通弦与径向Loewner微分方程，文[14]与文[13]已经分别讨论了它们的解关于时间t方向变化的估计以及对应于两个驱动函数的Loewner微分方程的解的差值可以通过这两个驱动函数差的上确界范数来估计。在本文，我们所关心的是偶极Loewner微分方程的相应问题。设$f_t(z)$是偶极Loewner微分方程的一个解，并且固定z，应用Bieberbach定理[17]，我们给出$f_t(z)$依时间方向变化的一个估计，准确的描述见第2节的定理1。对于给定的两个驱动函数$W_t^{(1)}$与$W_t^{(2)}$，设$f_t^{(1)}(z)$与$f_t^{(2)}(z)$为偶极Loewner方程分别对应于$W_t^{(1)}$与$W_t^{(2)}$的两个解，基于逆时间的偶极Loewner方程我们导出了$f_t^{(1)}(z)$与$f_t^{(2)}(z)$的差值可以通过$W_t^{(1)}$与$W_t^{(2)}$差的上确界范数来估计，准确的描述见第3节的定理2。这将通弦与径向Loewner微分方程的一些相应结果推广到带形区域内偶极Loewner微分方程的情形。我们的工作与文[13-14]进行比较，虽然方法类似但有许多细节是不一样的，因为我们所讨论微分方程的表达式不同于前者，这导致我们的估计涉及三角函数与双曲函数之间的关系及其相关性质。

1 Loewner微分方程

在这一节，我们将简要介绍本文涉及Loewner微分方程的几个版本以及一些基本概念，更详细的相关背景知识可参见文[15-16,18-19]等。

1.1 通弦Loewner微分方程

若K是闭上半平面$\overline{\mathbb{H}}$上的一个紧集使得$\mathbb{H}\backslash K$是一个单连通区域且$K=\overline{K\cap\mathbb{H}}$，则称$K$为上半平面$\mathbb{H}$的一个**壳**。对任意一个壳$K$，都存在唯一一个共形映射$g_K$，将上半平面$\mathbb{H}\backslash K$映到$\mathbb{H}$，并且$g_K(z)$满足规范化：$\lim\limits_{z\to\infty}\left(g_K(z)-z\right)=0$，当$z\to\infty$时，有下面Laurent展开式

$$g_K(z)=z+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}+\cdots,$$

其中系数$a_n(n=1,2,\cdots)$都是实数。定义$a_1=a_1(K)$为壳K的容量。

假设$\gamma(t)(t\geqslant 0)$是$\overline{\mathbb{H}}$上一条连续的路径且$\gamma(0)\in\mathbb{R}$，这里$\mathbb{R}$表示实轴。规定$\gamma(t)$碰到自身或者$\mathbb{R}$就立即弹到开阔的区域，这样随着时间的改变，我们就得到了一族递增的壳$\left\{K_t:t\geqslant 0\right\}$；相应地，对于每一个壳$K_t$都有一个容量$a_1\left(K_t\right)$，同时也得到一个从$\mathbb{H}\backslash K_t$到$\mathbb{H}$的共形映射$g_{K_t}$. 由于$a_1\left(K_t\right)$是连续的，因此，我们可以参数化$\gamma(t)$使得$a_1\left(K_t\right)=2t$. 在这种情形下，对于每一个$t\geqslant 0$，记$g_t:=g_{K_t}$，则Loewner定理给出$g_t(z)$满足下面通弦Loewner微分方程

$$\dot{g}_t(z)=\frac{2}{g_t(z)-W_t},\qquad g_0(z)=z, \tag{1}$$

其中$\dot{g}_t(z):=\dfrac{\partial}{\partial t}g_t(z)$，$W_t=g_t\left(\gamma(t)\right)$称为(1)的驱动函数，也叫做驱动项。

反之，若给定一个定义在$\left[0,\infty\right)$上的连续实值函数W_t，则对于所有$z\notin K_t=\left\{w\in\overline{\mathbb{H}}:\tau(w)\leqslant t\right\}$，方程(1)在时间$t$之前是可解的，其中$\tau(w)$表示$g_t(z)-W_t$等于0的第一时间。而且，对于任意$t\geqslant 0$，$g_t$将$\mathbb{H}\backslash K$共形映射到$\mathbb{H}$上，我们称$K_t$为这个Loewner链$\left\{g_t\right\}$的壳。

如果令$f_t(z)$为$g_t(z)$的逆映射，即$f_t(z)=g_t^{-1}(z)$，则对任意的$z\in\mathbb{H}$，$f_t(z)$满足下面微分方程

$$\dot{f}_t(z)=-f_t'(z)\frac{2}{z-W_t},\qquad f_0(z)=z, \tag{2}$$

其中$f_t'(z):=\dfrac{\partial}{\partial z}f_t(z)$. 我们称方程(2)为上半平面$\mathbb{H}$内的通弦Loewner微分方程，其解$\left\{f_t\right\}$(Loewner链)是一类从上半平面$\mathbb{H}$到$\mathbb{H}$的子集的共形映射。

1.2 径向Loewner微分方程

令$\mathbb{D}$表示单位圆盘，若$K\subset\overline{\mathbb{D}}$是一个闭集使得$\mathbb{D}\backslash K$是一个包含原点的单连通区域，则称$K$为$\mathbb{D}$的一个壳，记为$\mathbb{D}$-壳。同样地，也存在唯一一个共形映射$g_K(z):\mathbb{D}\backslash K\to\mathbb{D}$满足$g_K(0)=0$，$g_K'(0)>0$. K的容量

定义为 $\mathrm{cap}_{\mathbb{D}}(K)=\ln g_K'(0)$. 在 $z=0$ 处，$g_K(z)$ 可以展开为

$$g_K(z)=\exp\left(\mathrm{cap}_{\mathbb{D}}(K)\right)z+\sum_{k=2}^{\infty}c_k z^k,$$

这里系数 c_k 是复数。

假设 $\gamma(t)$ 是一条在 $\overline{\mathbb{D}}$ 内从边界 $\partial\mathbb{D}$ 到原点的连续路径，则对每个 t，都产生一个 $\mathbb{D}$–壳 $(K_t)_{t\geqslant 0}$ 与相应的一个共形映射 $g_{K_t}(z):\mathbb{D}\backslash K_t\to\mathbb{D}$. 同样地，我们可以参数化 $\gamma(t)$，使得 $\ln g_K'(0)=t$，在这种情况下令 $g_t:=g_{K_t}$，则 g_t 满足下面径向 Loewner 微分方程

$$\dot{g}_t(z)=g_t(z)\frac{W_t+g_t(z)}{W_t-g_t(z)},\qquad g_0(z)=z,\tag{3}$$

其中驱动项 $W_t=g_t\left(\gamma(t)\right)\in\partial\mathbb{D}$.

反过来，如果给定一个定义在 $[0,\infty)$ 上且取值于 $\partial\mathbb{D}$ 的连续函数 W_t，则对于所有 $z\notin K_t=\left\{w\in\overline{\mathbb{D}}:\tau(w)\leqslant t\right\}$，方程 (3) 在时间 t 之前是可解的，其中 $\tau(w)$ 表示 $g_t(z)$ 碰到 W_t 的第一时间。而且对于任意的 $t\geqslant 0$，g_t 将 $\mathbb{D}\backslash K_t$ 共形映射到 $\mathbb{D}$ 上，我们称 K_t 为这个 Loewner 链 $\left\{g_t\right\}$ 的壳。

如果令 $f_t=g_t^{-1}$，则对于每一个 $z\in\mathbb{D}$，f_t 满足下面微分方程

$$\dot{f}_t(z)=zf_t'(z)\frac{W_t+z}{W_t-z},\qquad f_0(z)=z,\tag{4}$$

称方程 (4) 为单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内的径向 Loewner 微分方程，该方程的解 $\left\{f_t\right\}$(Loewner 链)，是一类从单位圆盘 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$ 的子集的共形映射。

1.3　偶极 Loewner 微分方程

考虑带形区域 $\mathbb{S}_\pi=\{z\in\mathbb{C}:0<\mathrm{Im}\,z<\pi\}$. 设 $K\subset\overline{\mathbb{S}_\pi}$ 是一个紧集使得 $\mathbb{S}_\pi\backslash K$ 是一个单连通区域且 $K=\overline{K\cap\mathbb{S}_\pi}$，则称 K 为 $\mathbb{S}_\pi$ 的一个壳。对每一个壳 K，存在唯一共形映射 $g_K(z):\mathbb{S}_\pi\backslash K\to\mathbb{S}_\pi$. 记 $\mathrm{cap}_{\mathbb{S}_\pi}(K)$ 为壳 K 的容量，则有 $\lim\limits_{z\to\pm\infty}\left(g_K(z)-z\right)=\pm\mathrm{cap}_{\mathbb{S}_\pi}(K)$.

假设 $\gamma(t)$ 是在 $\mathbb{S}_\pi$ 内一条从原点出发到上边界 $\mathbb{R}_\pi=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,z=\pi\}$ 的连续路径，则对每个 t，都产生一个 $\mathbb{S}_\pi$–壳 $(K_t)_{t\geqslant 0}$ 与相应的一个共形映射 $g_{K_t}(z):\mathbb{S}_\pi\backslash K_t\to\mathbb{S}_\pi$. 同样地，我们可以参数化 $\gamma(t)$，使得 $\mathrm{cap}_{\mathbb{S}_\pi}(K)=t$，在这种情况下令 $g_t:=g_{K_t}$，则 g_t 满足下面偶极 Loewner 微分方程

$$\dot{g}_t(z)=\coth\left(\frac{g_t(z)-W_t}{2}\right),\qquad g_0(z)=z,\tag{5}$$

其中驱动项 W_t 是定义在 $[0,\infty)$ 上的一个实值函数。

反过来，如果给定一个定义在 $[0,\infty)$ 内且取值于实轴上的连续函数 W_t，则对于所有 $z\notin K_t=\left\{w\in\overline{\mathbb{S}_\pi}:\tau(w)\leqslant t\right\}$，方程 (5) 在时间 t 之前是可解的，其中 $\tau(w)$ 表示 $g_t(z)$ 碰到 W_t 的第一时间。而且对于任意的 $t\geqslant 0$，g_t 将 $\mathbb{S}_\pi\backslash K_t$ 共形映射到 $\mathbb{S}_\pi$ 上，我们称 K_t 为这个 Loewner 链 $\left\{g_t\right\}$ 的壳。

固定 $t\in[0,\infty)$，$w\in\mathbb{S}_\pi$，令 $h_s(w)(0\leqslant s\leqslant t)$，为下面微分方程的解

$$\dot{h}_s(w)=-\coth\left(\frac{h_s(w)-W_{t-s}}{2}\right),\qquad h_0(w)=w,\tag{6}$$

则称方程 (6) 为方程 (5) 的逆时间偶极 Loewner 微分方程。

如果令 $f_t=g_t^{-1}$，则对于每一个 $z\in\mathbb{S}_\pi$，f_t 满足下面微分方程

$$\dot{f}_t(z)=-f_t'(z)\coth\left(\frac{z-W_t}{2}\right),\qquad g_0(z)=z,\tag{7}$$

称方程 (7) 为带形区域 $\mathbb{S}_\pi$ 内的偶极 Loewner 微分方程，这个方程的解 $\left\{f_t\right\}$(Loewner 链) 是一类从带形区域 $\mathbb{S}_\pi$ 到 $\mathbb{S}_\pi$ 的子集的共形映射。

2 依时间方向变化的估计

通弦Loewner微分方程(2)与径向Loewner微分方程(4)的解依时间变化的估计已经分别在文[5]与[4]中给出。在这一节应用三角函数与双曲函数之间的关系以及Bieberbach定理导出了偶极Loewner微分方程(7)的解按时间方向变化的一个估计，我们有下面的定理。

定理1 假设f_t是带形区域$\mathbb{S}_\pi$内偶极Loewner微分方程的解，并且固定$z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{S}_\pi$. 则存在一个常数$C > 0$，使得当$0 \leqslant s < 1/M(y)$时有

$$C^{-1} \leqslant \frac{\left|f'_{t+s}(z)\right|}{\left|f_t'(z)\right|} \leqslant C \tag{8}$$

且

$$\left|f_{t+s}(z) - f_t(z)\right| \leqslant CN(y)\left|f_t'(z)\right|, \tag{9}$$

其中$M(y) = \dfrac{3}{y}\csc\dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{2}\csc^2\dfrac{y}{2}$，$N(y) = \dfrac{\csc\frac{y}{2}}{M(y)}$.

为了证明定理1，需要下面的引理。首先，关于三角函数和双曲函数之间的关系，我们有

引理1 令$z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$，则下面等式成立

(i) $\tanh z = \dfrac{\tanh x + \mathrm{i}\tan y}{1 + \mathrm{i}\tanh x\tan y}$， $\coth z = \dfrac{\sinh x\cosh x}{\sinh^2 x + \sin^2 y} - \mathrm{i}\dfrac{\sin y\cos y}{\sinh^2 x + \sin^2 y}$;

(ii) $\operatorname{csch}^2 z = \dfrac{X^2 - Y^2 - 2\mathrm{i}XY}{\left(X^2 + Y^2\right)^2}$，其中$X = \sinh x\cos y, Y = \cosh x\sin y$.

证明 应用欧拉公式并结合三角函数恒等式与双曲函数的定义容易推出上面等式成立，也可参见文[20]。

其次，文[17]证明了关于S类单叶函数的如下结果。

引理2 (Bieberbach定理) 设$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$，$z \in \mathbb{D}$是一个S类单叶函数，则有

$$\left|a_2\right| \leqslant 2. \tag{10}$$

定理1的证明 对偶极Loewner方程(7)两边关于z求偏导并结合三角形不等式得

$$\left|\dot{f}_t'(z)\right| \leqslant \left|f_t''(z)\right|\left|\coth\left(\frac{z - W_t}{2}\right)\right| + \frac{1}{2}\left|f_t'(z)\right|\left|\operatorname{csch}^2\left(\frac{z - W_t}{2}\right)\right|. \tag{11}$$

首先估计$\left|\coth\left(\dfrac{z - W_t}{2}\right)\right|$与$\left|\operatorname{csch}^2\left(\dfrac{z - W_t}{2}\right)\right|$. 记$\dfrac{z - W_t}{2} = a + b\mathrm{i}$. 则显然$b = \dfrac{y}{2}$，且引理1(i)给出

$$\left|\coth\left(\frac{z - W_t}{2}\right)\right| = \frac{1}{\left|\tanh(a + b\mathrm{i})\right|} = \frac{\left|1 + \mathrm{i}\tanh a\tan b\right|}{\left|\tanh a + \mathrm{i}\tan b\right|} \leqslant \frac{\sqrt{1 + \tan^2 b}}{\tan b} = \csc b = \csc\frac{y}{2}. \tag{12}$$

此外，由引理1(ii)有

$$\operatorname{csch}^2\left(\frac{z - W_t}{2}\right) = \frac{X^2 - Y^2 - 2\mathrm{i}XY}{\left(X^2 + Y^2\right)^2},$$

这里$X = \sinh a\cos b$，$Y = \cosh a\sin b$. 由此可得

$$\left|\operatorname{csch}^2\left(\frac{z - W_t}{2}\right)\right| = \frac{\left|X^2 - Y^2 - 2\mathrm{i}XY\right|}{\left(X^2 + Y^2\right)^2} = \frac{1}{X^2 + Y^2} = \frac{1}{\sinh^2 a + \sin^2 b} \leqslant \frac{1}{\sin^2 b} = \csc^2\frac{y}{2}. \tag{13}$$

其次，估计$\left|f_t''(z)\right|$. 设$\Phi(\xi) = x + \mathrm{i}y\dfrac{1 + \xi}{1 - \xi}$，则$\Phi: \mathbb{D} \to \mathbb{H}$是一个由单位圆盘$\mathbb{D}$到上半平面$\mathbb{H}$的共形映射。注意到

$$\frac{1 + \xi}{1 - \xi} = 1 + 2\xi\frac{1}{1 - \xi} = 1 + 2\xi\left(1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^n + \cdots\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n.$$

从而有

$$\Phi(\xi)=x+\mathrm{i}y\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\xi^{n}\right).$$

将函数

$$\Psi(\xi)=\frac{f_t(\Phi(\xi))-f_t(z)}{f_t'(z)\Phi'(0)},$$

在$\xi=0$处展开得

$$\Psi(\xi)=\Psi(0)+\Psi'(0)\xi+\frac{1}{2}\Psi''(0)\xi^2+\cdots=\xi+\frac{\mathrm{i}yf_t''(z)+f_t'(z)}{f_t'(z)}\xi^2+\cdots.$$

由引理2得

$$\left|\frac{\mathrm{i}yf_t''(z)+f_t'(z)}{f_t'(z)}\right|\leqslant 2.$$

从而有

$$\left|f_t''(z)\right|\leqslant 3\left|f_t'(z)\right|y^{-1}.\tag{14}$$

最后，将式(12)~(14)代入式(11)得

$$\left|\dot{f}_t'(z)\right|\leqslant\left|f_t'(z)\right|\left(\frac{3}{y}\csc\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\csc^2\frac{y}{2}\right).$$

进一步可得

$$\left|\partial_t\ln\left|f_t'(z)\right|\right|\leqslant\left|\partial_t\ln f_t'(z)\right|=\frac{3}{y}\csc\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\csc^2\frac{y}{2}.$$

令$M(y)=\frac{3}{y}\csc\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\csc^2\frac{y}{2}$，则对上式两边关于$t$求积分得到

$$-\int_t^{t+s}M(y)\,\mathrm{d}t\leqslant\ln\frac{\left|f_{t+s}'(z)\right|}{\left|f_t'(z)\right|}\leqslant\int_t^{t+s}M(y)\,\mathrm{d}t,$$

亦即

$$\exp(-M(y)s)\leqslant\frac{\left|f_{t+s}'(z)\right|}{\left|f_t'(z)\right|}\leqslant\exp(M(y)s).$$

当$s\in\left[0,\frac{1}{M(y)}\right]$时，取常数$C>\mathrm{e}$，则上面不等式蕴含式(8)成立。进一步，由式(7),(8),(12)得到

$$\left|f_{t+s}(z)-f_t(z)\right|=\left|\int_0^s\partial_r f_{t+r}(z)\,\mathrm{d}r\right|\leqslant\int_0^s\left|f_{t+r}'(z)\right|\left|\coth\left(\frac{z-W_{t+r}}{2}\right)\right|\mathrm{d}r\leqslant C\frac{\csc\frac{y}{2}}{M(y)}\left|f_t'(z)\right|\cdot$$

这推出式(9)成立，其中$N(y)=\frac{\csc\frac{y}{2}}{M(y)}$. 于是完成了该定理的证明。

3　依驱动函数的上确界范数的估计

文[4-5]分别讨论了径向和通弦Loewner方程对应于两个不同驱动函数的解的差值。这差值可通过这两个驱动函数差的上确界范数来估计。本节中将应用逆时间Loewner方程(6)导出偶极Loewner方程(7)的相应估计，确切地说，有

定理2　给定$0<T<\infty$. 假设对于每一个$t\in[0,T]$，函数$f_t^{(1)}$与$f_t^{(2)}$分别是驱动项为$W_t^{(1)}$与$W_t^{(2)}$的偶极Loewner方程(7)的解。如果令

$$\varepsilon=\sup_{t\in[0,T]}\left(W_t^{(1)}-W_t^{(2)}\right),$$

则对每一个$z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{S}_\pi$，存在一个依赖于$T$的常数$c > 1$使得

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|f_t^{(1)}(z) - f_t^{(2)}(z)\right| \leqslant c\varepsilon\left(\frac{I_{T,y}}{\tan\dfrac{y}{2}} - 1\right), \tag{15}$$

其中$I_{t,y} = \sqrt{\left(\sec^2\dfrac{y}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} - 1}$，$t \in [0,T]$. 进一步有

$$\left|f_t^{(1)}(z) - f_t^{(2)}(z)\right| \leqslant c\varepsilon\exp\left\{\frac{1}{2}c\left[\ln\frac{I_{t,y}\left|\left(f_t^{(1)}\right)'(z)\right|}{\tan\dfrac{y}{2}}\ln\frac{I_{t,y}\left|\left(f_t^{(2)}\right)'(z)\right|}{\tan\dfrac{y}{2}}\right]^{1/2} + \ln\ln\frac{I_{t,y}}{\tan\dfrac{y}{2}}\right\}, \quad t \in [0,T]. \tag{16}$$

证明 首先固定$t \in (0,T]$. 对于$0 \leqslant s \leqslant t$，记$\tilde{W}_s^{(j)} = \tilde{W}_{t-s}^{(j)}$，$j = 1,2$. 同时固定$z = x + \mathrm{i}y$，并令

$$z_s^{(j)} = \sinh\left(\frac{h_s^{(j)}(z) - \tilde{W}_s^{(j)}}{2}\right), \quad j = 1,2 ,$$

其中$h_s^{(j)}(z)$是对应于驱动函数为$\tilde{W}_s^{(j)}$的方程(6)的解。定义

$$H(s) = h_s^{(1)}(z) - h_s^{(2)}(z).$$

则有

$$H(t) = h_t^{(1)}(z) - h_t^{(2)}(z) = f_t^{(1)}(z) - f_t^{(2)}(z).$$

下面估计$|H(t)|$. 对$H(s)$关于s求导并结合式(6)给出

$$\partial_s\left(\sinh\frac{H(s)}{2}\right) - \psi(s)\sinh\frac{H(s)}{2} = \left(\sinh\frac{\tilde{W}_s^{(2)} - \tilde{W}_s^{(1)}}{2}\right)\xi(s),$$

这里

$$\psi(s) = \frac{\cosh\dfrac{H(s)}{2}\cosh\dfrac{\tilde{W}_s^{(2)} - \tilde{W}_s^{(1)}}{2}}{2z_s^{(1)}z_s^{(2)}}, \qquad \xi(s) = \frac{\left(\cosh\dfrac{H(s)}{2}\right)^2}{2z_s^{(1)}z_s^{(2)}}.$$

通过解上面关于$\sinh\dfrac{H(s)}{2}$的微分方程得到

$$\sinh\frac{H(s)}{2} = \exp\left(\int_0^r\psi(s)\mathrm{d}s\right)\left(\sinh\frac{H(0)}{2} + \int_0^s\left(\sinh\frac{\tilde{W}_s^{(2)} - \tilde{W}_s^{(1)}}{2}\right)\exp\left(-\int_0^r\psi(s)\mathrm{d}s\right)\xi(r)\mathrm{d}r\right).$$

由于$H(0) = 0$，因此有

$$\left|\sinh\frac{H(s)}{2}\right| \leqslant \int_0^t\left|\sinh\frac{\tilde{W}_s^{(2)} - \tilde{W}_s^{(1)}}{2}\right|\exp\left(\int_s^t\mathrm{Re}\,\psi(r)\mathrm{d}r\right)|\xi(s)|\mathrm{d}s.$$

由此可推出

$$\begin{aligned}\left|\sinh\frac{f_t^{(1)}(z) - f_t^{(2)}(z)}{2}\right| &\leqslant \left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left(\sinh\frac{\tilde{W}_s^{(2)} - \tilde{W}_s^{(1)}}{2}\right)\right)\left(\int_0^t\exp\left(\int_s^t\mathrm{Re}\,\psi(r)\mathrm{d}r\right)|\xi(s)|\mathrm{d}s\right)\\ &\leqslant \varepsilon\int_0^t\exp\left(\int_s^t\mathrm{Re}\,\psi(r)\mathrm{d}r\right)|\xi(s)|\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{17}$$

接下来，将估计$\int_s^t\mathrm{Re}\,\psi(r)\mathrm{d}r$与$\int_0^t|\xi(s)|\mathrm{d}s$. 记

$$a_s^{(j)} := \mathrm{Re}\left(\frac{h_s^{(j)}(z) - \tilde{W}_s^{(j)}}{2}\right), \quad b_s^{(j)} := \mathrm{Im}\left(\frac{h_s^{(j)}(z) - \tilde{W}_s^{(j)}}{2}\right), \quad j = 1,2.$$

则由$h_s^{(j)}(z)$的定义，有

$$\dot{h}_s^{(j)}(z) = -\coth\left(\frac{h_s^{(j)}(z) - \tilde{W}_s^{(j)}}{2}\right) = -\coth\left(a_s^{(j)} + \mathrm{i}\, b_s^{(j)}\right) = \frac{-\frac{1}{2}\sinh 2a_s^{(j)} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sin 2b_s^{(j)}}{\left(x_s^{(j)}\right)^2 + \left(y_s^{(j)}\right)^2}, \tag{18}$$

其中$x_s^{(j)} = \sinh a_s^{(j)} \cos b_s^{(j)}, y_s^{(j)} = \cosh a_s^{(j)} \sin b_s^{(j)}$. 由此可得

$$\mathrm{Im}\left(\dot{h}_s^{(j)}(z)\right) = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{i}\sin 2b_s^{(j)}}{\left(x_s^{(j)}\right)^2 + \left(y_s^{(j)}\right)^2}.$$

注意到

$$\mathrm{Im}\left(\frac{h_s^{(j)}(z) - \tilde{W}_s^{(j)}}{2}\right) = \mathrm{Im}\frac{h_s^{(j)}(z)}{2} = b_s^{(j)}.$$

从而有

$$4\partial_s \ln\left(\tan b_s^{(j)}\right) = \frac{2}{\left(x_s^{(j)}\right)^2 + \left(y_s^{(j)}\right)^2}.$$

两边对s积分就得到

$$4\ln\frac{\tan b_s^{(j)}}{\tan\frac{y}{2}} = \int_0^s \frac{2}{\left(x_s^{(j)}\right)^2 + \left(y_s^{(j)}\right)^2}\,\mathrm{d}s. \tag{19}$$

对式(18)关于z求导，得到

$$\left(\dot{h}_s^{(j)}\right)'(z) = \frac{1}{2}\left(h_s^{(j)}\right)'(z)\operatorname{csch}^2\left(\frac{h_s^{(j)}(z) - \tilde{W}_s^{(j)}}{2}\right).$$

这蕴含着

$$2\partial_s \ln\left(h_s^{(j)}\right)'(z) = \frac{\left(x_s^{(j)}\right)^2 - \left(y_s^{(j)}\right)^2 - 2\mathrm{i}x_s^{(j)}y_s^{(j)}}{\left(\left(x_s^{(j)}\right)^2 + \left(y_s^{(j)}\right)^2\right)^2}.$$

由此推出

$$4\partial_s \ln\left|\left(h_s^{(j)}\right)'(z)\right| = 4\mathrm{Re}\left[\partial_s \ln\left(h_s^{(j)}\right)'(z)\right] = \frac{2\left(\left(x_s^{(j)}\right)^2 - \left(y_s^{(j)}\right)^2\right)}{\left(\left(x_s^{(j)}\right)^2 + \left(y_s^{(j)}\right)^2\right)^2}.$$

两边对s求积分得

$$4\ln\left|\left(h_s^{(j)}\right)'(z)\right| = \int_0^s \frac{2\left(\left(x_s^{(j)}\right)^2 - \left(y_s^{(j)}\right)^2\right)}{\left(\left(x_s^{(j)}\right)^2 + \left(y_s^{(j)}\right)^2\right)^2}\,\mathrm{d}s, \quad j = 1, 2. \tag{20}$$

对于$\mathrm{Re}\,\psi(s)$，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\psi(s) &= \frac{\mathrm{Re}\left[\cosh\frac{H(s)}{2}\cosh\frac{\tilde{W}_s^{(2)} - \tilde{W}_s^{(1)}}{2}\left(x_s^{(1)} - \mathrm{i}y_s^{(1)}\right)\left(x_s^{(2)} - \mathrm{i}y_s^{(2)}\right)\right]}{2\left(\left(x_s^{(1)}\right)^2 + \left(y_s^{(1)}\right)^2\right)\left(\left(x_s^{(2)}\right)^2 + \left(y_s^{(2)}\right)^2\right)} \\ &\leqslant \frac{\left|\cosh\frac{H(s)}{2}\right|\left|\cosh\frac{\tilde{W}_s^{(2)} - \tilde{W}_s^{(1)}}{2}\right|\left|\left(x_s^{(1)} - \mathrm{i}y_s^{(1)}\right)\left(x_s^{(2)} - \mathrm{i}y_s^{(2)}\right)\right|}{2\left(\left(x_s^{(1)}\right)^2 + \left(y_s^{(1)}\right)^2\right)\left(\left(x_s^{(2)}\right)^2 + \left(y_s^{(2)}\right)^2\right)}.\end{aligned} \tag{21}$$

假定$0 < \varepsilon < 1$，则$\left|\cosh\frac{\tilde{W}_s^{(2)} - \tilde{W}_s^{(1)}}{2}\right| \leqslant \cosh\frac{1}{2}$. 同时，偶极Loewner微分方程给出$\lim\limits_{z\to\pm\infty}\left(h_s^{(j)}(z) - z\right) =$

$\pm\mathrm{cap}_{\mathbb{S}_\pi}\left(K_s\right)$. 这蕴含存在一个只依赖于$T$的常数$c_1>0$使得对于任意$z\in\mathbb{S}_\pi$有$\left|H(s)\right|\leqslant c_1$. 从而可知，存在一个只依赖于$T$的常数$c_2>0$使得$\left|\cosh\dfrac{H(s)}{2}\right|\leqslant c_2$. 此外，

$$\begin{aligned}\left|\left(x_s^{(1)}-\mathrm{i}y_s^{(1)}\right)\left(x_s^{(2)}-\mathrm{i}y_s^{(2)}\right)\right|&\leqslant c\left|x_s^{(1)}x_s^{(2)}-y_s^{(1)}y_s^{(2)}\right|\\&\leqslant c\left(\left|x_s^{(1)}x_s^{(2)}\right|+\left|x_s^{(1)}x_s^{(2)}\right|\frac{\left|y_s^{(1)}y_s^{(2)}\right|}{\left|x_s^{(1)}x_s^{(2)}\right|}\right)\\&=c\left|x_s^{(1)}x_s^{(2)}\right|,\end{aligned}$$

这里$c>1$是一个依赖于位置的常数。于是，由式(21)并结合Cauchy-Schwarz不等式得

$$\begin{aligned}4\int_s^t\mathrm{Re}\,\psi(s)\,\mathrm{d}s&\leqslant c\int_s^t\frac{2\left|x_s^{(1)}x_s^{(2)}\right|}{\left(\left(x_s^{(1)}\right)^2+\left(y_s^{(1)}\right)^2\right)\left(\left(x_s^{(2)}\right)^2+\left(y_s^{(2)}\right)^2\right)}\mathrm{d}s\\&\leqslant c\left(\int_0^t\frac{2\left(x_s^{(1)}\right)^2}{\left(\left(x_s^{(1)}\right)^2+\left(y_s^{(1)}\right)^2\right)^2}\mathrm{d}s\right)^{1/2}\left(\int_0^t\frac{2\left(x_s^{(2)}\right)^2}{\left(\left(x_s^{(2)}\right)^2+\left(y_s^{(2)}\right)^2\right)^2}\mathrm{d}s\right)^{1/2},\end{aligned}\tag{22}$$

其中$c>1$是一个仅依赖于T的常数的常数。因为

$$\int_0^t\frac{2\left(x_s^{(j)}\right)^2}{\left(\left(x_s^{(j)}\right)^2+\left(y_s^{(j)}\right)^2\right)^2}\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{2\left(\left(x_s^{(j)}\right)^2-\left(y_s^{(j)}\right)^2\right)}{\left(\left(x_s^{(j)}\right)^2+\left(y_s^{(j)}\right)^2\right)^2}\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{2}{\left(x_s^{(j)}\right)^2+\left(y_s^{(j)}\right)^2}\mathrm{d}s,$$

所以由式(19)，(20)得

$$\int_0^t\frac{2\left(x_s^{(j)}\right)^2}{\left(\left(x_s^{(j)}\right)^2+\left(y_s^{(j)}\right)^2\right)^2}\mathrm{d}s=2\ln\left|\left(h_s^{(j)}\right)'(z)\right|+2\ln\frac{\tan b_t^{(j)}}{\tan\dfrac{y}{2}}.\tag{23}$$

现在估计$\tan b_t^{(j)}$，$j=1,2$. 由$b_t^{(j)}$的定义有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tan b_t^{(j)}}{\partial t}&=\left(\sec^2 b_t^{(j)}\right)^2\frac{\partial b_t^{(j)}}{\partial t}=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\dot{h}_t^{(j)}(z)\right]\left(1+\tan^2 b_t^{(j)}\right)\\&=\frac{1}{4}\frac{\sin b_t^{(j)}\cos b_t^{(j)}}{\sinh^2 a_t^{(j)}+\sin^2 b_t^{(j)}}\left(1+\tan^2 b_t^{(j)}\right)\\&\leqslant\frac{1}{4}\frac{\sin b_t^{(j)}\cos b_t^{(j)}}{\sin^2 b_t^{(j)}}\left(1+\tan^2 b_t^{(j)}\right)=\frac{1}{4}\frac{1+\tan^2 b_t^{(j)}}{\tan b_t^{(j)}}.\end{aligned}$$

对t求积分得

$$\tan b_t^{(j)}\leqslant\sqrt{\left(\sec^2\frac{y}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}-1},\quad j=1,2.\tag{24}$$

根据式(22)~(24)得

$$\begin{aligned}\int_s^t\mathrm{Re}\,\psi(s)\,\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{4}c&\left(2\ln\left|\left(h_s^{(1)}\right)'(z)\right|+2\ln\frac{\left(\left(\sec^2\dfrac{y}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}-1\right)^{1/2}}{\tan\dfrac{y}{2}}\right)^{1/2}\\&\cdot\left(2\ln\left|\left(h_s^{(2)}\right)'(z)\right|+2\ln\frac{\left(\left(\sec^2\dfrac{y}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}-1\right)^{1/2}}{\tan\dfrac{y}{2}}\right)^{1/2}.\end{aligned}\tag{25}$$

同时，由式(19)与式(24)推出

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \left|\xi(s)\right| \mathrm{d}s &= \frac{1}{4} c \int_0^t \frac{2}{\left(\left(x_s^{(1)}\right)^2+\left(y_s^{(1)}\right)^2\right)^{1/2}\left(\left(x_s^{(2)}\right)^2+\left(y_s^{(2)}\right)^2\right)^{1/2}} \mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{1}{4} c\left(\int_0^t \frac{2}{\left(x_s^{(1)}\right)^2+\left(y_s^{(1)}\right)^2} \mathrm{d}s\right)^{1/2}\left(\int_0^t \frac{2}{\left(x_s^{(2)}\right)^2+\left(y_s^{(2)}\right)^2} \mathrm{d}s\right)^{1/2} \\
&\leqslant c \ln \frac{\left(\left(\sec^2 \dfrac{y}{2}\right) \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}-1\right)^{1/2}}{\tan \dfrac{y}{2}}.
\end{aligned} \tag{26}
$$

因此将式(25)，(26)代入式(17)且考虑到对任意的$t > 0$有$\sinh t \geqslant t$，可推出式(16)，其中常数$c > 1$仅依赖于T.

另外，从ψ与ξ的定义推出一定存在常数$\tilde{c} > 0$，$\left|\psi(s)\right| \leqslant \tilde{c}\left|\xi(s)\right|$. 于是有

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \exp\left(\int_s^t \operatorname{Re}\psi(r)\mathrm{d}r\right)\left|\xi(s)\right|\mathrm{d}s &\leqslant \int_0^t \exp\left(\tilde{c}\int_s^t\left|\xi(r)\right|\mathrm{d}r\right)\left|\xi(s)\right|\mathrm{d}s \\
&\leqslant \tilde{c}\int_0^t \exp\left(\int_s^t\left|\xi(r)\right|\mathrm{d}r\right)\left|\xi(s)\right|\mathrm{d}s \\
&\leqslant \tilde{c}\left(\exp\left(\int_s^t\left|\xi(s)\right|\mathrm{d}s\right)-1\right),
\end{aligned} \tag{27}
$$

这里$\tilde{c}$依赖于位置。把式(27)代入式(17)并结合式(26)，可得到式(15)，其中常数$c > 1$仅依赖于T. 证毕。

参考文献：

[1] SCHRAMM O. Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees [J]. Israel J Math, 2000, 118: 221-288.

[2] CHELKAK D, HONGLER C, IZYUROV K. Conformal invariance of spin correlations in the planar Ising model [J]. Ann of Math, 2015, 181(3): 1087-1138.

[3] CHELKAKD, SMIRNOV S. Universality in the 2D Ising model and conformal invariance of fermionic observables [J]. Invent Math, 2012, 189: 515-580.

[4] SMIRNOV S. Critical percolation in the plane: conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits [J]. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 2001, 333: 239-244.

[5] LAWLER G F, SCHRAMM O, WERNER W. Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees [J]. Ann Probab, 2004, 32: 939-995.

[6] SCHRAMM O, SHEFFIELD S. The harmonic explorer and its convergence to SLE(4) [J]. Ann Probab, 2005, 33: 2127-2148.

[7] SCHRAMM O, SHEFFIELD S. Contour lines of the two-dimensional discrete Gaussian free field [J]. Acta Math, 2009, 202: 21-137.

[8] SMIRNOV S. Conformal invariance in random cluster models. I. Holmorphic fermions in the Ising model [J]. Ann of Math, 2010, 172(2): 1435-1467.

[9] LAWLER G F, SCHRAMM O, WERNER W. The dimension of the planar Brownian frontier is 4/3 [J]. Math Res Lett, 2001, 8: 401-411.

[10] LAWLER G F, SCHRAMM O, WERNER W. Values of Brownian intersection exponents I: half-plane exponents [J]. Acta Math, 2001, 187: 237-273.

[11] LAWLER G F, SCHRAMM O, WERNER W. Values of Brownian intersection exponents II: plane exponents [J]. Acta Math, 2001, 187: 275-308.

[12] LAWLER G F, SCHRAMM O, WERNER W. Values of Brownian intersection exponents III: two-sided exponents [J]. Ann

Int Henri Poincaré, 2002, 38: 109-123.

[13] VIKLUND F J. Convergence rates for loop-erased random walk and other Loewner curves [J]. Ann Probab, 2015, 43: 119-165.

[14] VIKLUND F J, ROHDE S, WONG C. On the continuity of SLE_κ in κ [J]. Probability Theory Related Fields, 2014, 159: 413-433.

[15] LAWLER G F. Conformally invariant processes in the plane [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 2005.

[16] MARSHALL D E, ROHDE S. The Loewner differential equation and slit mappings [J]. J Amer Math Soc, 2005, 18: 763-778.

[17] 李忠. 复分析导引 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2004.

[18] KAGER W. NIENHUIS B. A guide to stochastic Löwner evolution and its applications [J]. J Stat Phys, 2004, 115: 1149-1229.

[19] BAUER M, BERNARD D, HOUDAGER J. Diploar stochastic Loewner evolution [J]. J Stat Mech Theor and Exper, 2005, 3(3): 336-354.

[20] AHLFORS L V. Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable [M]. New York: McGraw-Hill, 1966.

（责任编辑　冯兆永）